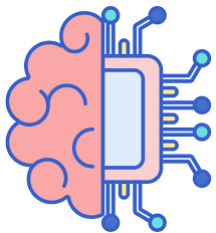


ميلاد سلطانی





فهرست مطالب فصل سوم

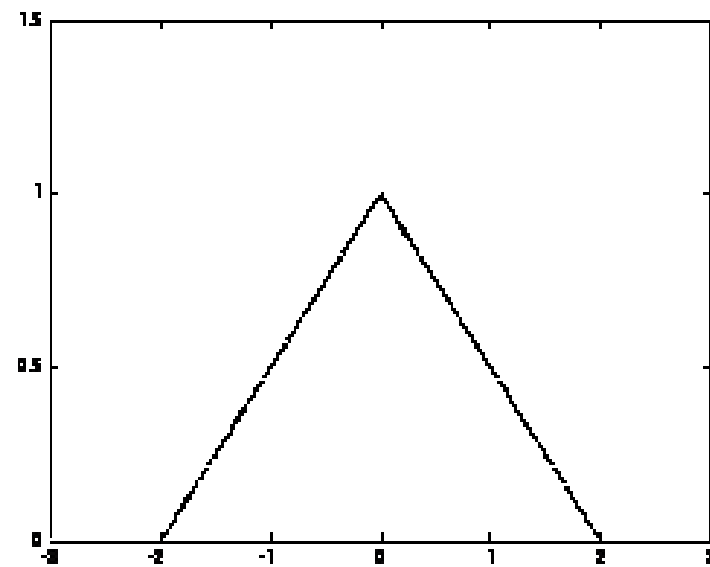
- بیان مجموعه های فازی
- عملیات جبری روی مجموعه های فازی
- فازی سازی
- دی فازی سازی

سیستم های فازی Fuzzy Systems

(قسمت دوم)

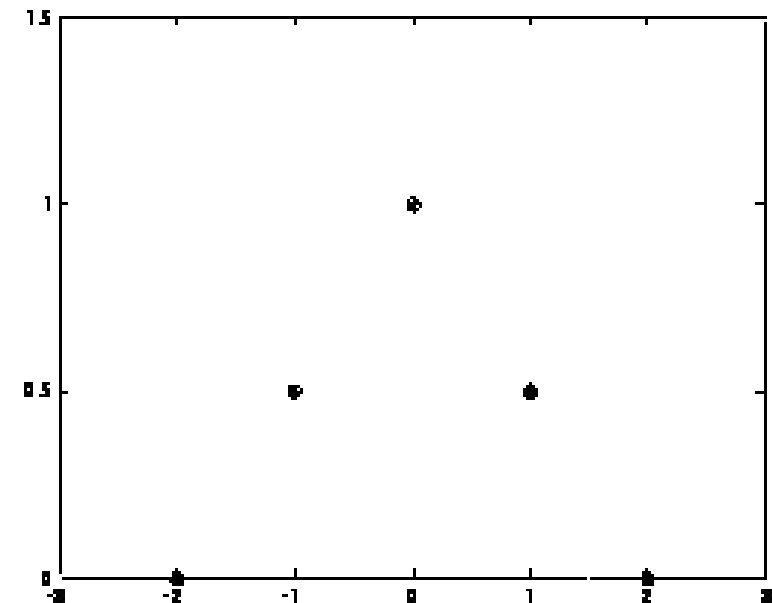
انواع مجموعه‌های فازی

براساس مجموعه مقادارها و شکل نمودار عضویت مجموعه‌های فازی آن را به چند دسته طبقه‌بندی می‌کنند. برای مثال اگر تابع درجه عضویت برای مجموعه فازی A به شکل یک مثلث ترسیم شود، آن مجموعه را «مجموعه فازی مثلثی» (Triangle Fuzzy Set) می‌نامند.



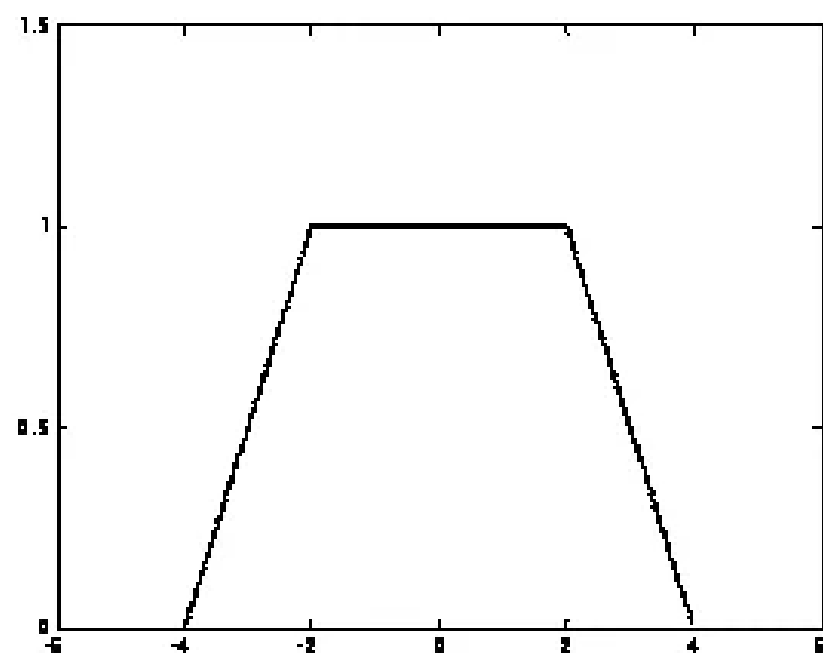
مجموعه فازی نامتناهی - مثلثی

$$\int_{-2}^0 \frac{2+x}{x} + \int_0^2 \frac{2-x}{x}$$

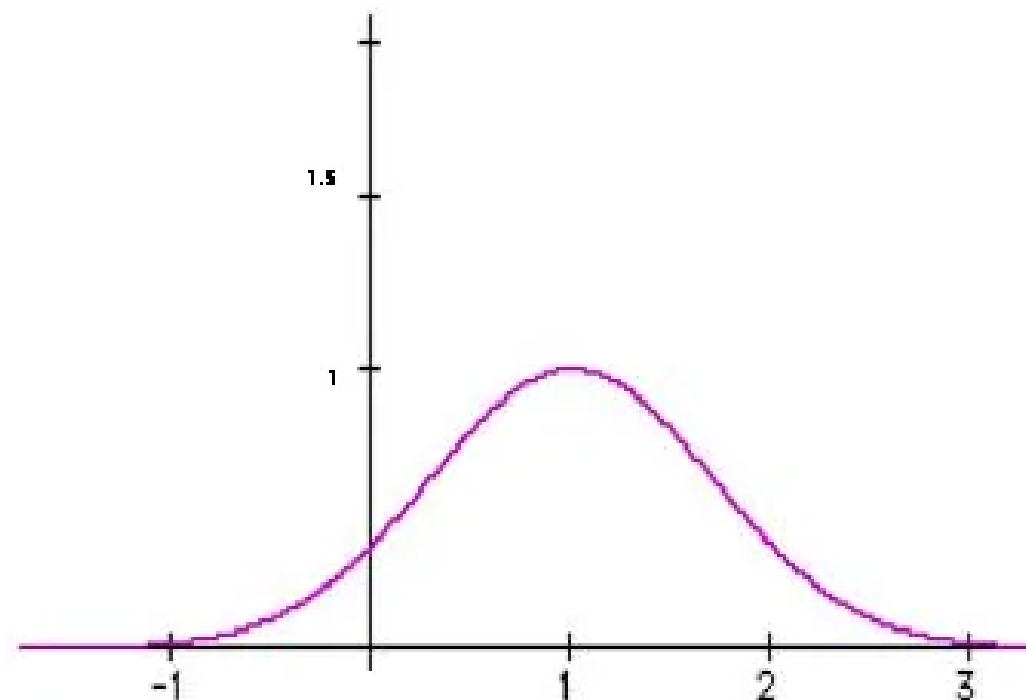


مجموعه فازی متناهی - مثلثی

$$A = \frac{\mu(x_1)}{x_1} + \frac{\mu(x_2)}{x_2} + \frac{\mu(x_3)}{x_3} + \frac{\mu(x_4)}{x_4} + \frac{\mu(x_5)}{x_5} = \sum_{i=1}^5 \frac{\mu(x_i)}{x_i}$$



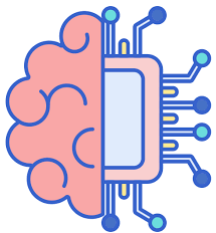
مجموعه فازی نامتناهی دوزنقه‌ای



مجموعه فازی نامتناهی نمایی

$$A = \int_{-4}^{-2} \frac{\frac{4+x}{2}}{x} + \int_{-2}^2 \frac{1}{x} + \int_2^4 \frac{\frac{4-x}{2}}{x}$$

$$A = \int_x e^{-0.5(x-1)^2}$$



اجتماع فازی

■ اجتماع (Union) تعیین می کند که یک عنصر تا چه حد به حداقل یکی از مجموعه ها تعلق دارد.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

* $\mu_A(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه A

* $\mu_B(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه B

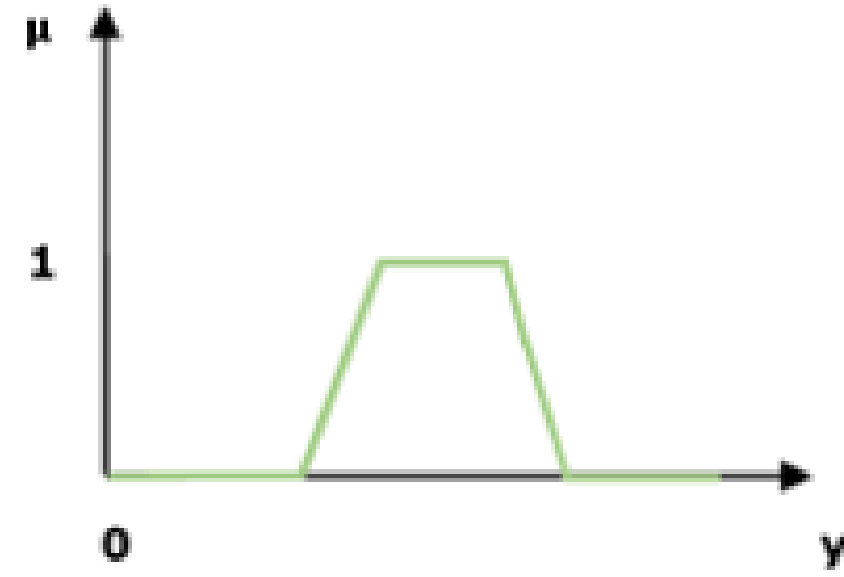
■ مثال: فرض کنید دو مجموعه فازی به شکل زیر باشند:

◀ مجموعه A : "قد بلند" با $\mu_A(170) = 0.5$ و $\mu_A(180) = 0.8$

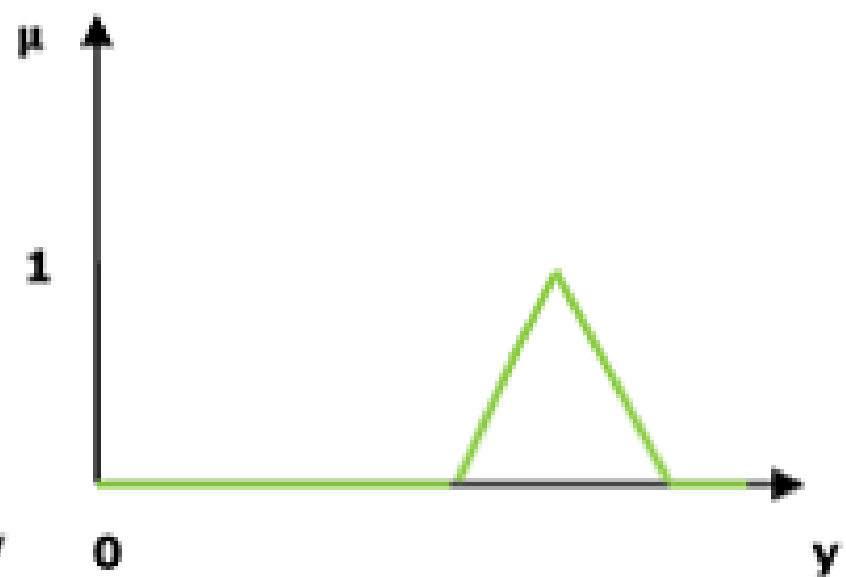
◀ مجموعه B : "ورزشکار" با $\mu_B(170) = 0.7$ و $\mu_B(180) = 0.6$

$$\mu_{A \cup B}(170) = \max[\mu_A(170), \mu_B(170)] = \max(0.5, 0.7) = 0.7 \quad \text{برای } x = 170 *$$

$$\mu_{A \cup B}(180) = \max[\mu_A(180), \mu_B(180)] = \max(0.6, 0.8) = 0.8 \quad \text{برای } x = 180 *$$



مجموعه فازی A

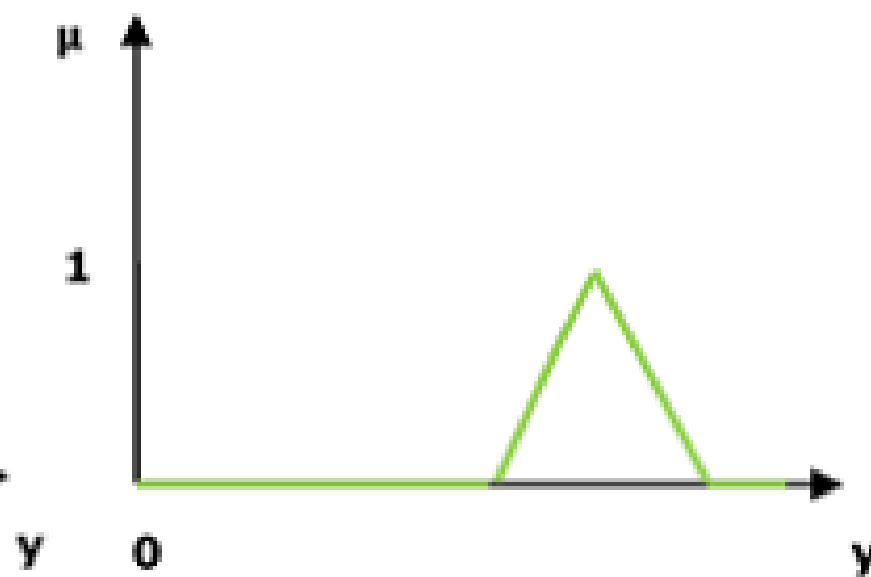


مجموعه فازی B

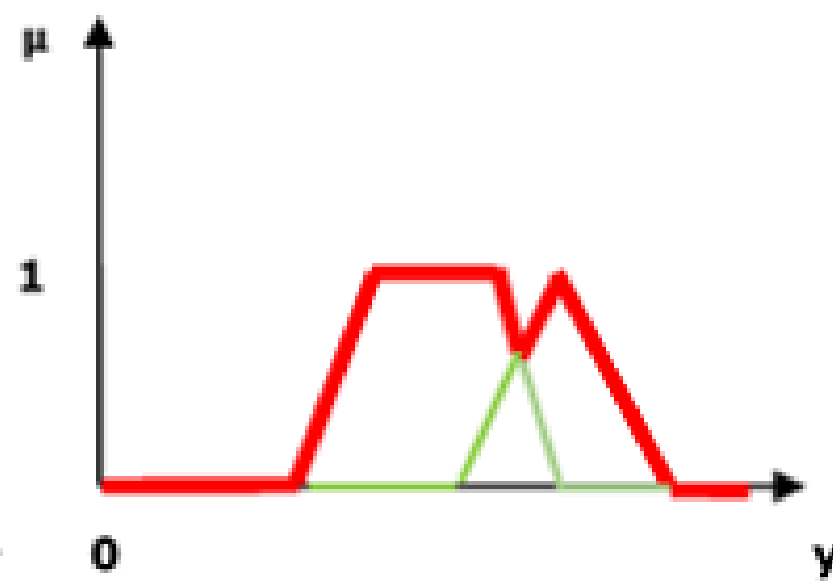
اجتماع (?) =



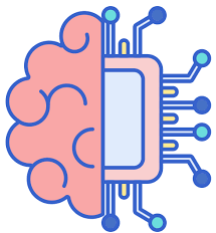
مجموعه فازی A



مجموعه فازی B



اجتماع دو مجموعه فازی



اشتراک فازی

■ **اشتراک (Intersection)** تعیین می کند که یک عنصر تا چه حد به هر دو مجموعه تعلق دارد.

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

* $\mu_A(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه A

* $\mu_B(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه B

■ مثال: فرض کنید دو مجموعه فازی به شکل زیر باشند:

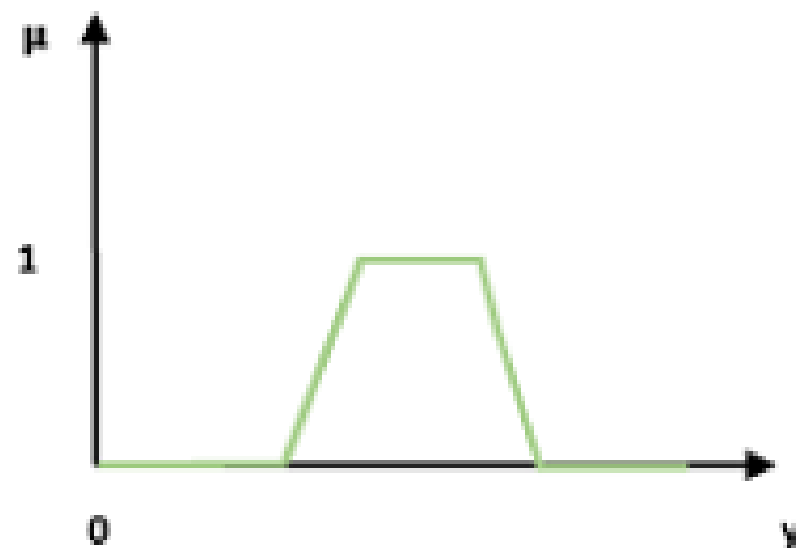
◀ مجموعه A : "قد بلند" با $\mu_A(170) = 0.5$ و $\mu_A(180) = 0.8$

◀ مجموعه B : "ورزشکار" با $\mu_B(170) = 0.7$ و $\mu_B(180) = 0.6$

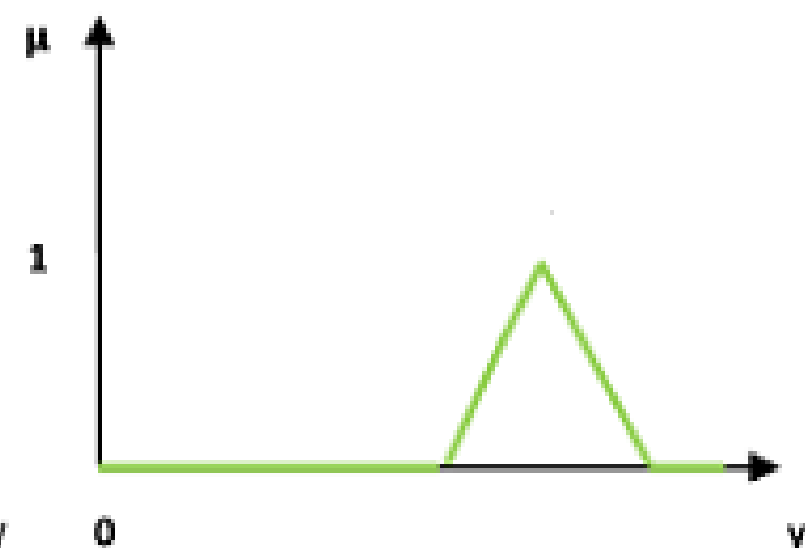
$$\mu_{A \cap B}(170) = \min[\mu_A(170), \mu_B(170)] = \min(0.5, 0.7) = 0.5 \quad \text{* برای } x = 170$$

$$\mu_{A \cap B}(180) = \min[\mu_A(180), \mu_B(180)] = \min(0.6, 0.8) = 0.6 \quad \text{* برای } x = 180$$



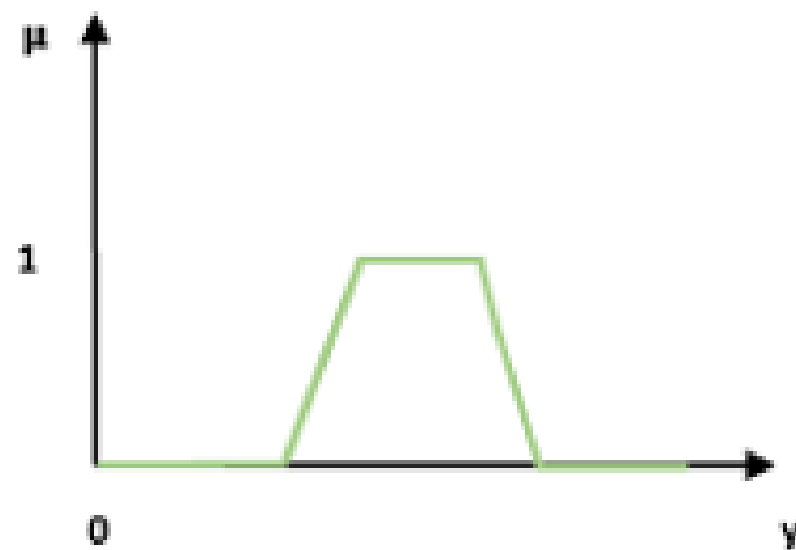


مجموعه فازی A

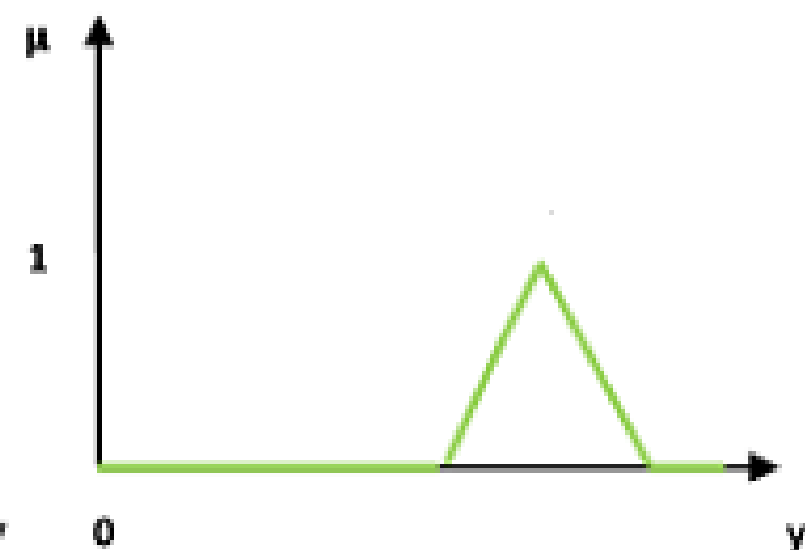


مجموعه فازی B

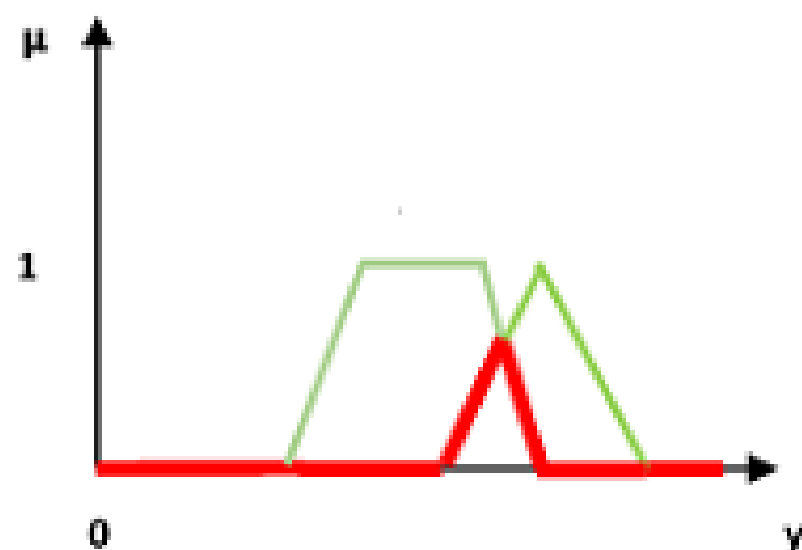
اشتراک (?) =



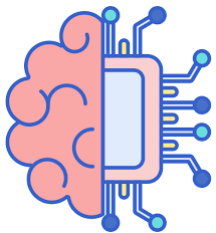
مجموعه فازی A



مجموعه فازی B



اشتراک دو مجموعه فازی



مکمل فازی

■ مکمل (Complement) نشان می‌دهد که یک عنصر تا چه حد به مجموعه تعلق ندارد.

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

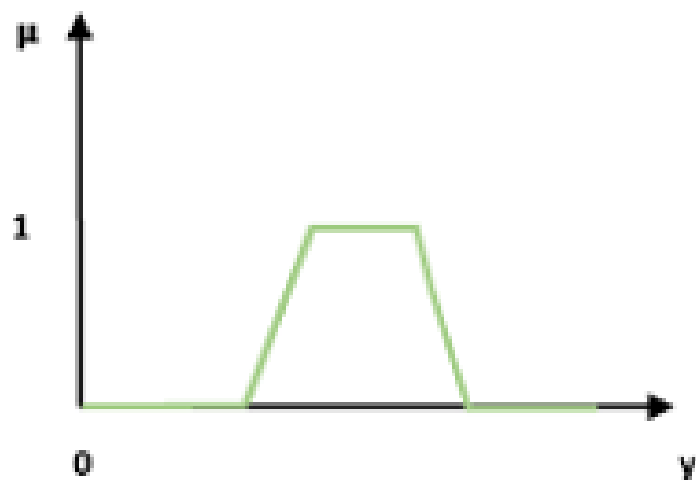
* $\mu_A(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه A

■ مثال: فرض کنید دو مجموعه فازی به شکل زیر باشند:

◀ مجموعه A : "قد بلند" با $\mu_A(170) = 0.5$ و $\mu_A(180) = 0.8$

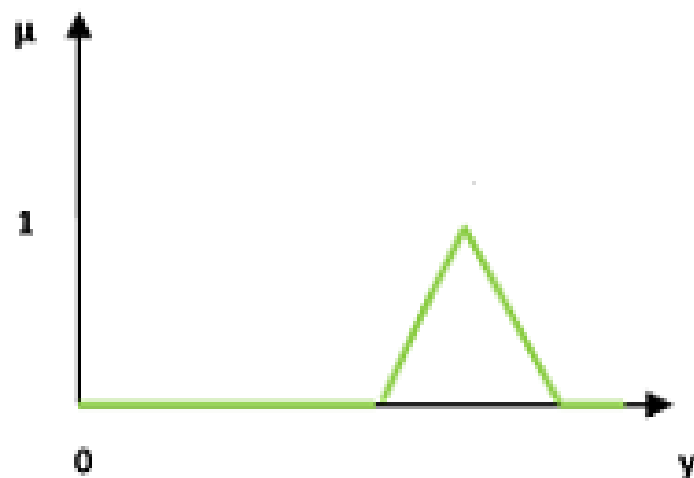
$$\mu_{\neg A}(170) = 1 - \mu_A(170) = 1 - 0.5 = 0.5 \quad \text{* برای } x = 170$$

$$\mu_{\neg A}(180) = 1 - \mu_A(180) = 1 - 0.8 = 0.2 \quad \text{* برای } x = 180$$



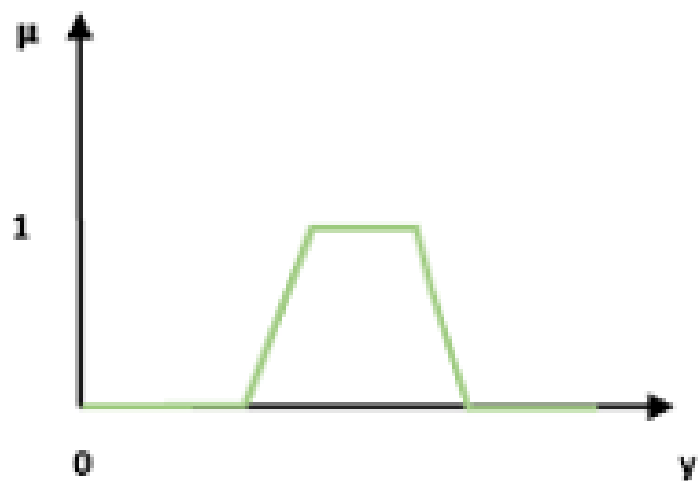
مجموعه فازی A

مکمل (?) =

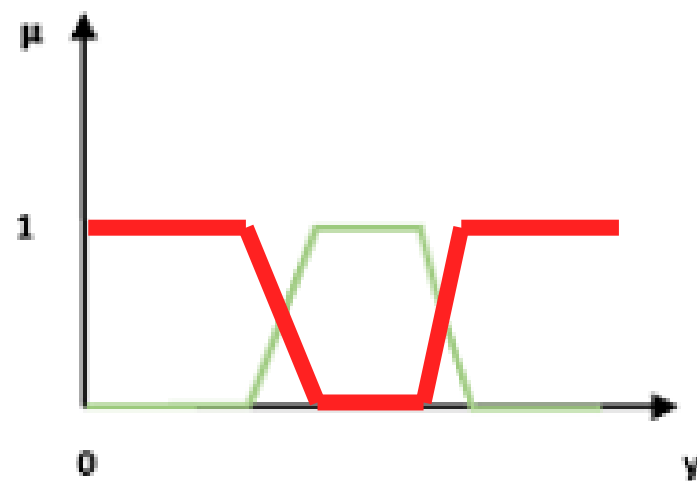


مجموعه فازی B

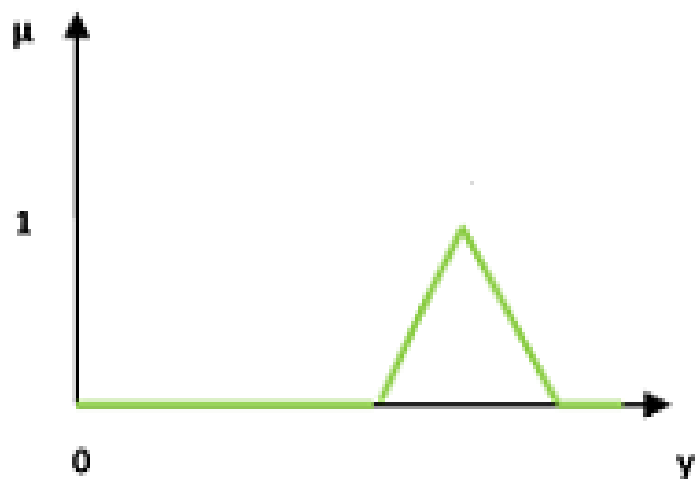
مکمل (?) =



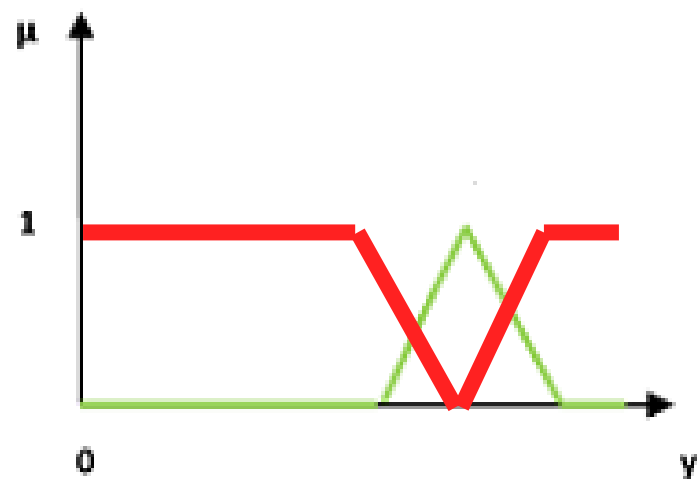
مجموعه فازی A



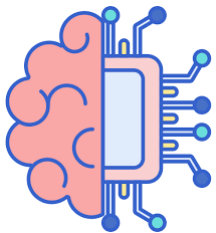
مکمل مجموعه فازی A



مجموعه فازی B



مکمل مجموعه فازی B



تفاضل فازی

■ **تفاضل فازی (Difference)** بیانگر این است که یک عنصر به مجموعه اول تعلق دارد اما به مجموعه دوم تعلق ندارد.

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min(\mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

* $\mu_A(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه A

* $\mu_B(x)$ = درجه عضویت عنصر x در مجموعه B

■ مثال: فرض کنید دو مجموعه فازی به شکل زیر باشند:

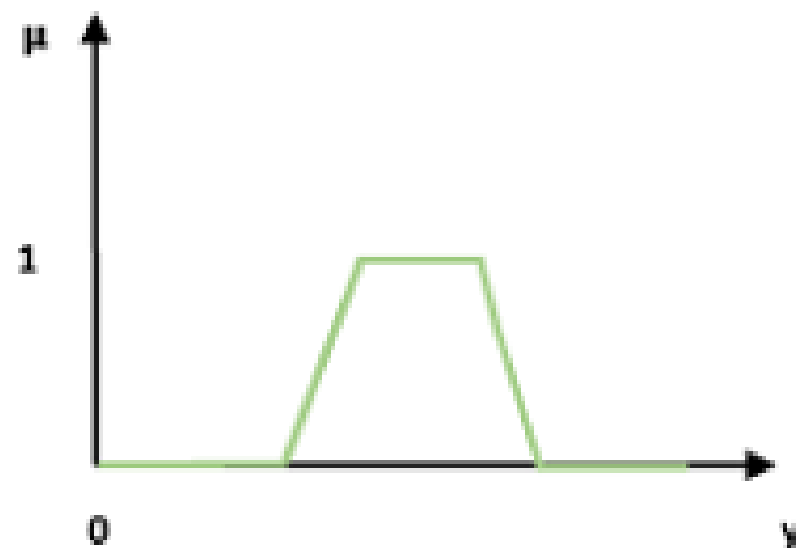
$$\mu_A(x) = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8)\} \blacktriangleleft$$

$$\mu_B(x) = \{(1, 0.4), (2, 0.3), (3, 0.6)\} \blacktriangleleft$$

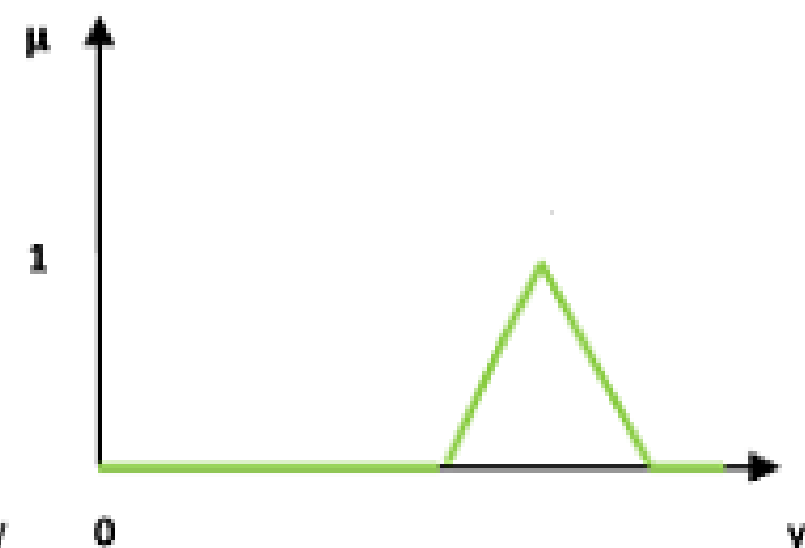
$$\mu_{A \setminus B}(1) = \min(\mu_A(1), 1 - \mu_B(1)) = \min(0.2, 0.6) = 0.2$$

$$\mu_{A \setminus B}(2) = \min(\mu_A(2), 1 - \mu_B(2)) = \min(0.5, 0.7) = 0.5 \quad \rightarrow \quad \mu_{A \setminus B}(x) = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.4)\}$$

$$\mu_{A \setminus B}(3) = \min(\mu_A(3), 1 - \mu_B(3)) = \min(0.8, 0.4) = 0.4$$

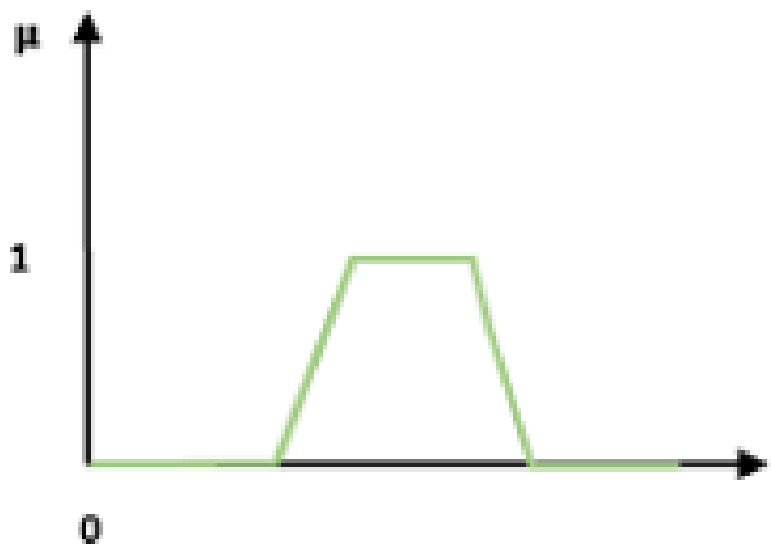


مجموعه فازی A

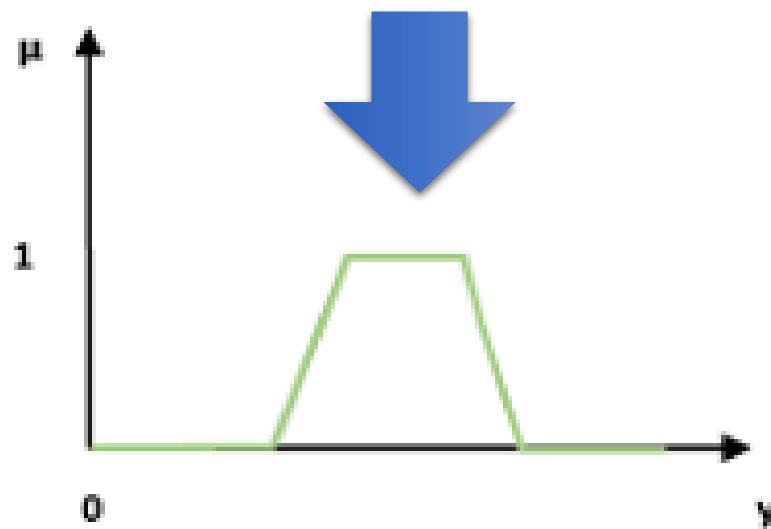


مجموعه فازی B

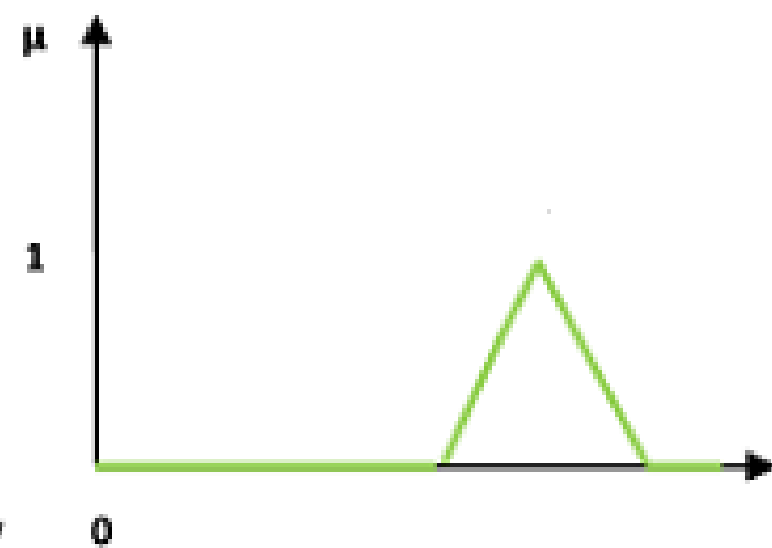
تفاضل (?) =



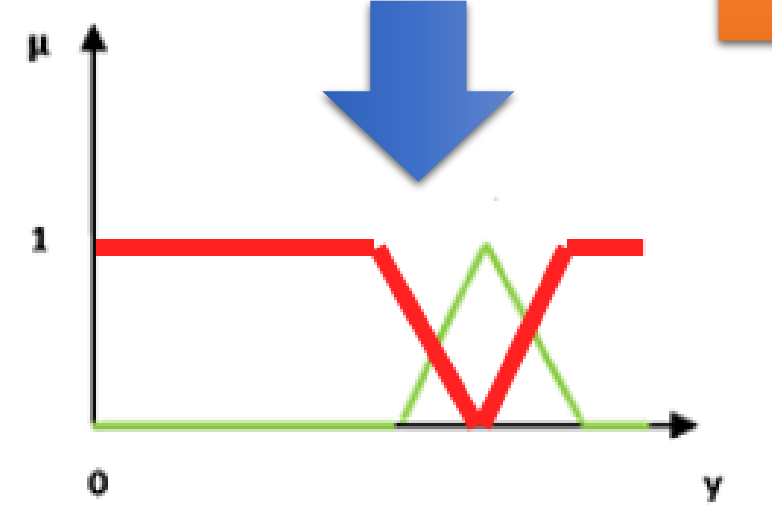
مجموعه فازی A



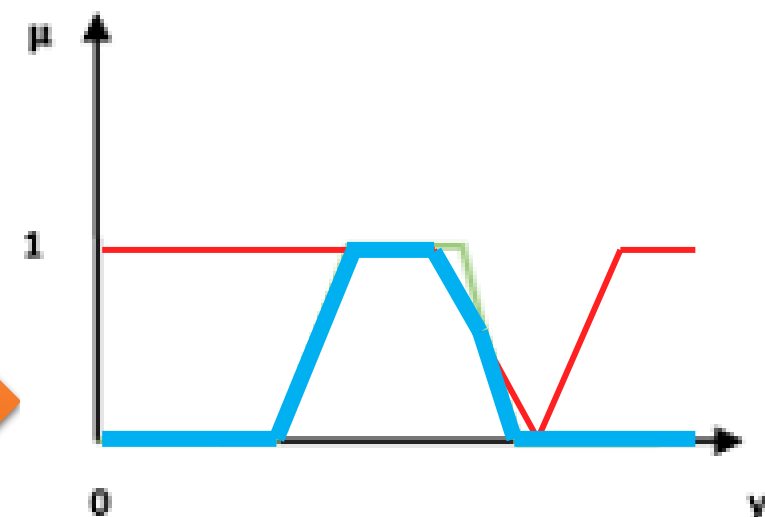
مجموعه فازی A



مجموعه فازی B



مکمل مجموعه فازی B



مجموعه فازی A

فرض کنید که مجموعه U, A و B به صورت زیر نوشته شده باشند.

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$A = \left\{ \frac{0.1}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.6}{x_3}, \frac{0.9}{x_4} \right\},$$

$$B = \left\{ \frac{0.2}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.8}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_5} \right\}$$

اجتماع (?)

اشتراک (?)

مکمل (?)

تفاضل (?)

فرض کنید که مجموعه‌های فازی A و B مربوط به مثال ۱ را در اختیار داریم. بنابر تعریف‌های گفته شده برای اشتراک، اجتماع و متمم مجموعه‌های فازی خواهیم داشت:

$$A \cap B = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{0}{x_5}$$

$$A \cup B = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

متمم مجموعه A و B به ترتیب برابر هستند با:

$$A' = \frac{1 - 0.1}{x_1} + \frac{1 - 0.5}{x_2} + \frac{1 - 0.6}{x_3} + \frac{1 - 0.9}{x_4} + \frac{1 - 0}{x_5} =$$
$$\frac{0.9}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

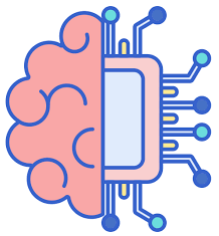
$$B' = \frac{1 - 0.2}{x_1} + \frac{1 - 0.5}{x_2} + \frac{1 - 0.8}{x_3} + \frac{1 - 1}{x_4} + \frac{1 - 1}{x_5} =$$
$$\frac{0.8}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.2}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{0}{x_5}$$

همانطور که می‌بینید اشتراک مجموعه فازی A با متممش یعنی A' برخلاف تئوری کلاسیک مجموعه‌ها $\emptyset$ نیست. زیرا برای مثال

$$A \cap A' = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.1}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

و همچنین اجتماع مجموعه A با متممش نیز مجموعه مرجع یعنی U را نمی‌سازد.

$$A \cup A' = \frac{0.9}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.9}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$



روش‌های ترکیب مجموعه‌های فازی (حداقل-حداکثر)

■ روش حداقل-حداکثر (Min-Max Method)

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

* مینیمم

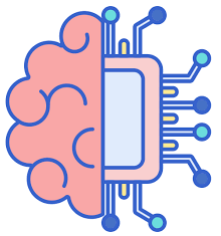
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

* ماکسیمم

■ کاربرد روش حداقل-حداکثر در سیستم‌های فازی

* استنتاج فازی: استفاده برای تصمیم‌گیری مبتنی بر قواعد.

* کنترل فازی: ترکیب خروجی قوانین کنترل.



روش‌های ترکیب مجموعه‌های فازی (ضرب-جمع)

■ روش ضرب-جمع (Product-Sum Method)

* ضرب

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$$

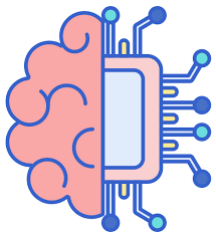
* جمع (با شرط اینکه درجات عضویت از ۱ تجاوز نکند).

$$\mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - (\mu_A(x) \times \mu_B(x))$$

■ کاربرد روش ضرب-جمع در سیستم‌های فازی:

* استنتاج پیچیده: ترکیب اثرات مختلف به صورت دقیق‌تر.

* پردازش داده: ارزیابی روابط در مجموعه‌های داده.



مکمل فازی (جدید)

■ هر تابع $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$ یک مکمل فازی (Fuzzy Complement) است اگر اصول موضوع زیر را ارضا نماید:

$$c(0) = 1 \quad , \quad c(1) = 0$$

* شرط مرزی

$$\forall a, b, a, b \in [0,1] \rightarrow \text{if } a < b \text{ then } c(a) > c(b)$$

* شرط نزولی بودن

■ انواع تابع مکمل فازی:

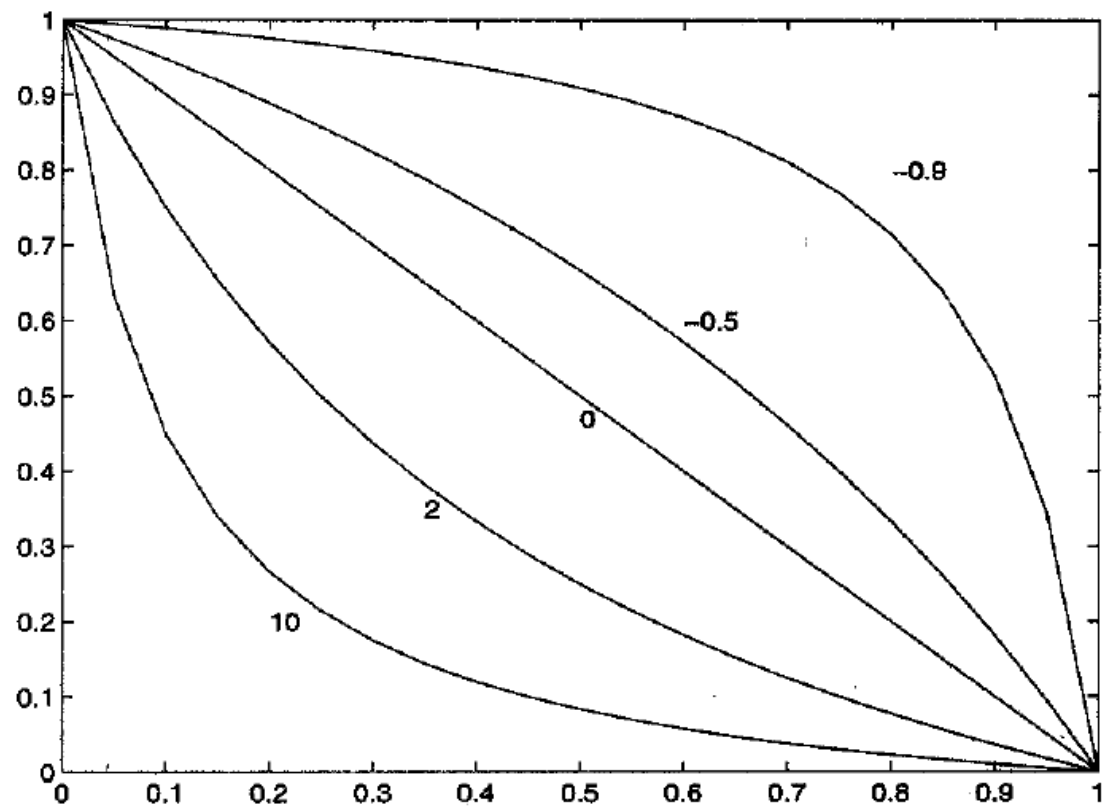
$$C_{\lambda}(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a}$$

* کلاس سوگنو (Sugeno):

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$$

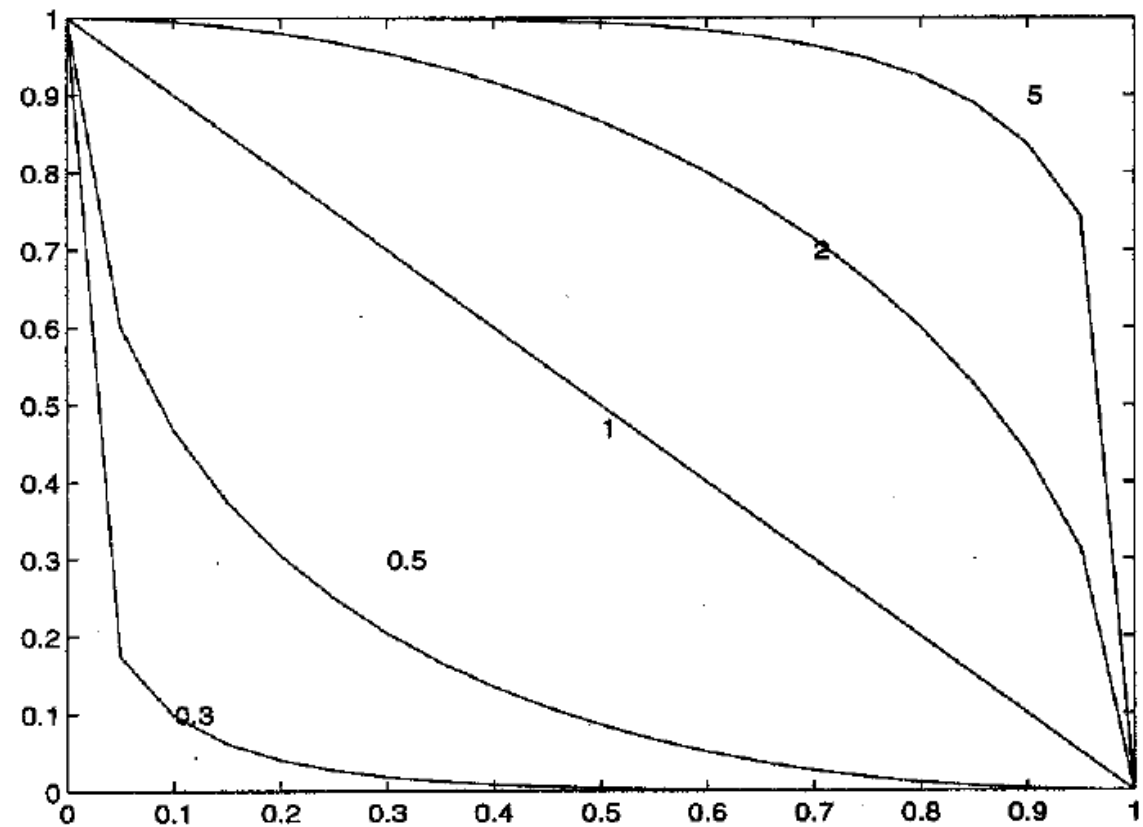
* کلاس یاگر (Yager):

$$C_{\lambda}(a) = \frac{1 - a}{1 + \lambda a}$$

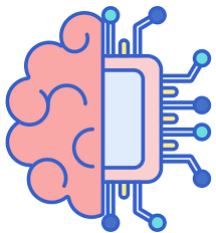


شکل تابع مکمل سوگنو

$$C_w(a) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$$



شکل تابع مکمل یاگر



فازی سازی (Fuzzification)

■ فرآیندی است که در آن مقادیر ورودی قطعی (دقیق) به مقادیر فازی تبدیل می‌شوند.

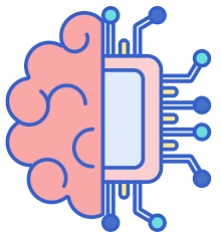
■ هدف این تبدیل تعیین درجه عضویت (Membership Degree) ورودی‌ها در مجموعه‌های فازی است و بر اساس توابع عضویت انجام می‌شود.

■ مراحل فازی‌سازی:

* **تعریف مجموعه‌های فازی:** مقادیر ورودی با مجموعه‌های زبانی (مانند "کم"، "متوسط"، "زیاد") توصیف می‌شوند.

◀ هر مجموعه فازی با یک تابع عضویت مشخص می‌شود.

* **محاسبه درجه عضویت:** درجه عضویت عددی است بین ۰ و ۱ که نشان می‌دهد ورودی تا چه حد به یک مجموعه فازی تعلق دارد.



دی فازی سازی مرکز ثقل (Centroid Method)

این روش رایج ترین روش دی فازی سازی است. مقدار خروجی به عنوان مرکز ثقل (مرکز جرم) ناحیه زیر منحنی تابع عضویت خروجی محاسبه می شود.

$$y = \frac{\int y \cdot \mu(y) dy}{\int \mu(y) dy}$$

مزایا و معایب:

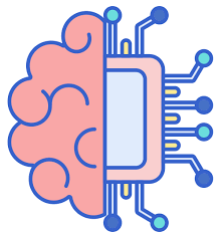
* **مزایا:** دقت بالا؛ مناسب برای خروجی های غیر خطی.

* **معایب:** محاسبات پیچیده برای نواحی غیر منظم.

$$\mu(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y}{5} & 0 \leq y < 5 \\ \frac{y-10}{5} & 5 \leq y \leq 10 \\ 0 & y > 10 \end{cases}$$

$$y = \frac{\int_0^5 y \cdot \frac{y}{5} dy + \int_5^{10} y \cdot \frac{y-10}{5} dy}{\int_0^5 \frac{y}{5} dy + \int_5^{10} \frac{y-10}{5} dy} \approx 5$$

مثال:



دی فازی سازی بیشینه (Max Membership Method)

■ در این روش خروجی، مقداری است که دارای بالاترین عضویت است.

■ مثال: فرض کنید تابع عضویت خروجی به صورت زیر باشد:

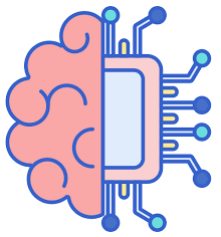
$$\mu(7)=0.4 - \mu(5)=0.8 - \mu(3)=0.5 \blacktriangleleft$$

* در این روش، $y=5$ بعنوان خروجی انتخاب می شود زیرا بیشترین درجه عضویت ($\mu=0.8$) را دارد.

■ مزایا و معایب:

* **مزایا:** محاسبات ساده و سریع.

* **معایب:** دقت کمتر؛ در شرایطی که مقادیر متعددی درجه عضویت مشابه دارند، ممکن است خروجی دقیق نباشد.



دی فازی سازی میانگین وزنی (Weighted Average Method)

این روش برای سیستم‌هایی با خروجی‌های خطی یا عددی مناسب است. خروجی به عنوان میانگین وزنی مقادیر خروجی و درجات عضویت آنها محاسبه می‌شود.

$$y = \frac{\sum y_i \cdot \mu_i(y)}{\sum y_i(y)}$$

مزایا و معایب:

* **مزایا:** مناسب برای خروجی‌های خطی؛ ساده‌تر از مرکز ثقل.

* **معایب:** نیاز به تعریف خروجی‌های عددی مشخص.

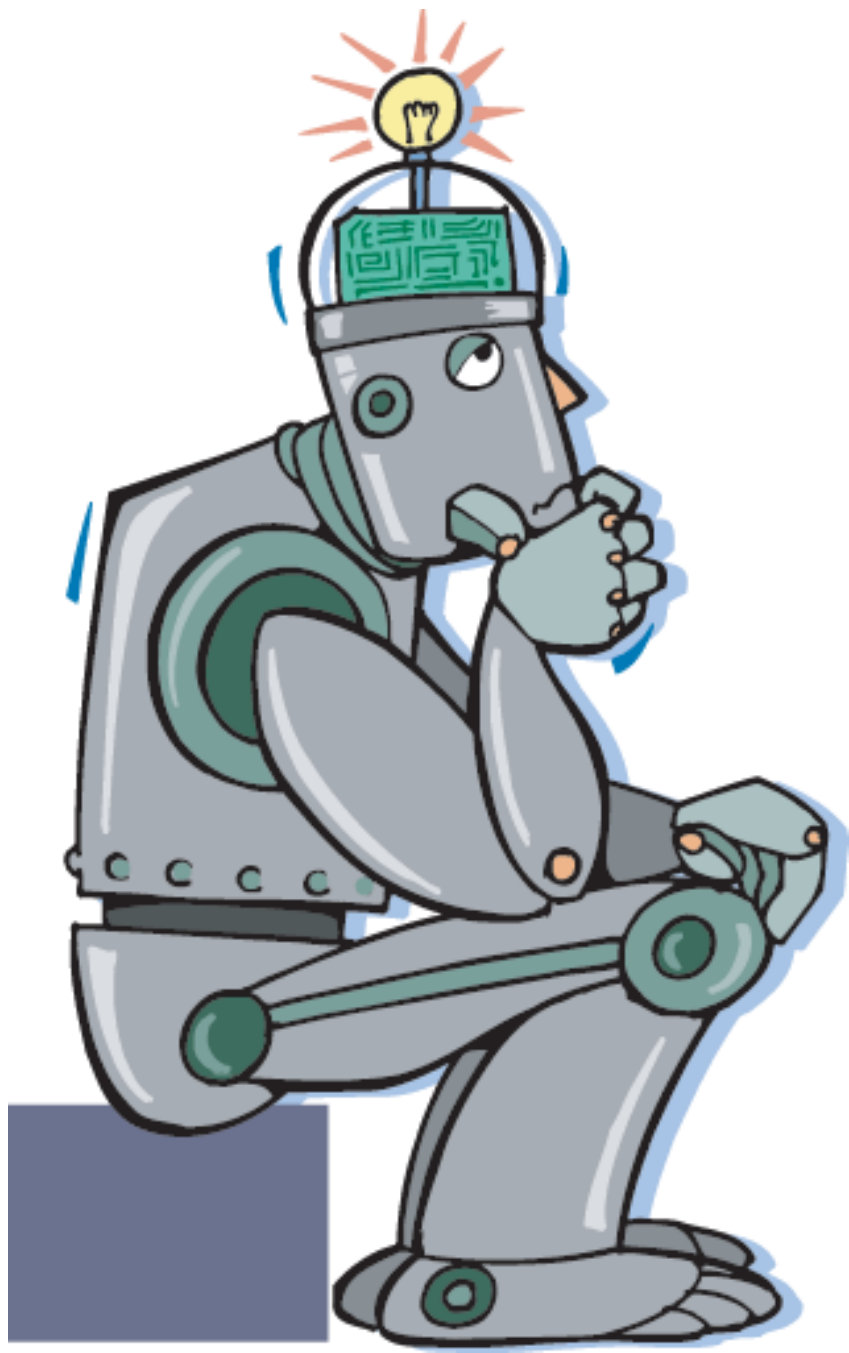
مثال: فرض کنید مقادیر خروجی و درجات عضویت آنها به صورت زیر باشد:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i \cdot \mu_i(y)}{\sum_{i=1}^3 y_i} = \frac{8.6}{1.8} \approx 4.78$$

$y_1=3, \mu(y_1)=0.6$ *

$y_2=5, \mu(y_2)=0.8$ *

$y_3=7, \mu(y_3)=0.4$ *



سؤال؟